

Übungen zur Analysis 3

Lösung

1.1ε Es sei $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie: $A \cap B, A \setminus B, A \triangle B \in \mathcal{A}$, wobei $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Lösung:

Nach Definition 1.1, 2. und 3. folgt sofort $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, $A \setminus B = (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$. Ebenso folgt $A \triangle B \in \mathcal{A}$ aus $A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{A}$ und 3..

1.2 Es sei $\Omega =]a, b]$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$. Wir betrachten das Mengensystem $\mathcal{A}(]a, b])$, bestehend aus allen endlichen Vereinigungen $\bigcup_{j=1}^n]a_j, b_j]$, $n \in \mathbb{N}_0$, von halboffenen Intervallen $]a_j, b_j] \subseteq]a, b]$ mit $a \leq a_j < b_j \leq b$.

- (a) Überzeugen Sie sich davon, dass sich jedes $A \in \mathcal{A}(]a, b])$ als eine endliche Vereinigung $A = \bigcup_{j=1}^n]a_j, b_j]$, $n \in \mathbb{N}_0$, von paarweise disjunkten Intervallen $]a_j, b_j]$ schreiben lässt.
- (b) Überzeugen Sie sich auch davon, dass solch eine Darstellung von A eindeutig bestimmt ist, wenn man zusätzlich $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n \leq b$ fordert.
- (c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}(]a, b])$ eine Mengenalgebra bildet.
- (d) Folgern Sie, dass auch $\mathcal{A}(\mathbb{R}) := \{A \cap \mathbb{R} \mid A \in \mathcal{A}(]-\infty, \infty])\}$ eine Mengenalgebra bildet.
- (e) $\mathcal{A}(]a, b])$ ist keine σ -Algebra. Geben Sie zur Illustration hiervon (ohne Beweis) eine Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{A}(]a, b])$ an, für die $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \notin \mathcal{A}(]a, b])$ gilt.

Lösung:

(a) Sei $A = \bigcup_{j=1}^n]a_j, b_j]$. Wir behaupten, dass wir A durch Wiederholung der folgenden zwei Schritte als disjunkte Vereinigung halboffener Intervalle schreiben können:

- (a) Zerlegen zweier sich schneidender Intervalle in disjunkte Intervalle.
- (b) Entfernen von Intervallen die vollständig in anderen enthalten sind.

Um dies möglichst transparent zu begründen, nennen wir eine endliche Menge von halboffenen Intervallen $D(A) = \{I_1, \dots, I_l\}$ eine *Darstellung von A*, falls $A = \bigcup_k I_k$. Und mit $s(D(A))$ bezeichnen wir die Anzahl der sich schneidenden Intervalle in der Darstellung $D(A)$. Unser Ziel ist es eine Darstellung mit $s(D(A)) = 0$ zu finden.

Da A Vereinigung endlich vieler Intervalle ist, gibt es auch nur endlich viele Intervalle die sich schneiden. Es ist also stets $s(D(A)) < \infty$.

Sei $D_0(A) = \{]a_1, b_1], \dots,]a_n, b_n]\}$. Wenden wir (b) auf $D_0(A)$ an, erhalten wir eine Darstellung $D_1(A)$ mit $s(D_1(A)) \leq s(D_0(A))$. Falls $s(D_1(A)) = 0$ sind wir fertig. Falls nicht existieren $]a_i, b_i]$ und $]a_j, b_j]$ in $D_1(A)$ mit nichtleerem Schnitt. Ohne Einschränkung sei

$a_i < a_j$ und $b_i < b_j$ (sonst liegt ein Intervall in dem anderen). Ersetze nun $]a_i, b_i]$ und $]a_j, b_j]$ durch $]a_i, b_j]$ und bezeichne die resultierende Darstellung mit $D_2(A)$. Dann gilt $s(D_2(A)) < s(D_1(A))$.

Anwenden von (b) liefert $D_3(A)$ mit $s(D_3(A)) \leq s(D_2(A))$. Da $D_0(A)$ endlich war, bricht dieser Prozess nach endlich vielen Schritten ab.

(b) Wir zeigen zuerst, dass eine solche Darstellung immer existiert. Dazu sei $A = \coprod_j]a_j, b_j]$ eine Darstellung durch disjunkte Intervalle, deren Existenz wir in (a) bewiesen haben. Falls $b_j = a_{j+1}$ so ersetze $]a_j, b_j] \cup]a_{j+1}, b_{j+1}]$ durch $]a_j, b_{j+1}]$.

Seien also $A = \cup_j]a_j, b_j] = \cup]a'_j, b'_j]$ zwei Darstellungen mit $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n \leq b$ bzw. $a \leq a'_1 < b'_1 < a'_2 < b'_2 < \dots < a'_n < b'_n \leq b$. Dann gilt offensichtlich $a_1 = a'_1$ und $b_n = b'_n$. Angenommen $b_1 \neq b'_1$, d.h. ohne Einschränkung $b_1 < b'_1$. Wegen $b_1 < a_2$ liegt dann für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ der Punkt $b_1 + \varepsilon$ nicht in $\cup]a_j, b_j]$, aber in $\cup]a'_j, b'_j]$. Widerspruch! Also ist $b_1 = b'_1$. Wir können jetzt analog für $\tilde{A} = \cup_{j \geq 2}]a_j, b_j] = \cup_{j \geq 2}]a'_j, b'_j]$ argumentieren und erhalten induktiv $a_i = a'_i$ und $b_i = b'_i$ für alle i .

(c) Mit der Definition $\cup_{j=1}^0]a_j, b_j] := \emptyset$ erhalten wir $\emptyset \in \mathcal{A}(]a, b])$.

Sei $A = \cup]a_j, b_j]$ mit $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_n$. Dann ist $A^c =]a, a_1] \cup]b_2, a_3] \cup \dots \cup]b_n, b]$. Die Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen ist offensichtlich.

(d) Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Für $A := C \cap \mathbb{R} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ mit $C \in \mathcal{A}(]-\infty, \infty])$ ist $]-\infty, \infty] \setminus C = A^c \cup (\{\infty\} \setminus C \cap \{\infty\}) \in \mathcal{A}(]-\infty, \infty])$ und somit $A^c = (]-\infty, \infty] \setminus C) \cap \mathbb{R} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Mit dem Distributivgesetz für $\cap, \cup$ folgt aus $A := C \cap \mathbb{R}$, $B := D \cap \mathbb{R} \in \mathcal{A}(]-\infty, \infty])$ bereits $A \cup B = (C \cap \mathbb{R}) \cup (D \cap \mathbb{R}) = (C \cup D) \cap \mathbb{R} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$.

(e) Für jede Menge $A \in \mathcal{A}(]a, b])$ gilt entweder $b \in A$ oder $[b - \varepsilon, b] \cap A = \emptyset$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Es ist aber $\cup_{j=1}^\infty]a, b - \frac{1}{j}] =]a, b[$.

1.3 Partitionen und σ -Algebren über abzählbaren Mengen. Es sei Ω eine endliche oder abzählbar unendliche Menge und $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra darüber. Für jedes $\omega \in \Omega$ sei $A(\omega) := \{\eta \in \Omega \mid \forall B \in \mathcal{A} : \omega \in B \Rightarrow \eta \in B\}$. Zeigen Sie:

- (a) ε Berechnen Sie $A(\omega)$ für $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$ und alle $\omega \in \Omega$.
- (b) Für alle $\omega \in \Omega$ ist $\omega \in A(\omega) \in \mathcal{A}$.
- (c) Für alle $\omega, \eta \in \Omega$ gilt $A(\omega) = A(\eta)$ oder $A(\omega) \cap A(\eta) = \emptyset$. Das abzählbare Mengensystem $\text{part}(\mathcal{A}) := \{A(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ bildet also eine *Partition* von Ω , also eine Zerlegung von Ω in nichtleere paarweise disjunkte Mengen.
- (d) Zeigen Sie für alle $B \subseteq \Omega$, dass $B \in \mathcal{A}$ genau dann gilt, wenn B sich als eine Vereinigung von Elementen von $\text{part}(\mathcal{A})$ darstellen lässt.

Lösung:

- (a) ε Es ist $A(1) = \{1\}$ und $A(2), A(3) = \{2, 3\}$.

- (b) Aus der obigen Schreibweise von $A(\omega)$ ist $\omega \in A(\omega)$ sofort klar.

Da eine σ -Algebra nur unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen ist, die Menge $\mathcal{A}(\omega) := \{B \in \mathcal{A} \mid \omega \in B\}$ aber potentiell überabzählbar ist, folgt $A(\omega) = \bigcap_{B \in \mathcal{A}(\omega)} B$ also nicht unmittelbar.

Die Behauptung $A(\omega) \in \mathcal{A}$ bedeutet insbesondere, dass $A(\omega) \in \mathcal{A}(\omega)$. Wir nutzen nun das Zornsche Lemma, um $A(\omega) \in \mathcal{A}(\omega)$ zu finden:

Lemma (Zornsches Lemma). *Jede partiell geordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke hat, besitzt ein maximales Element.*

Als partielle Ordnung auf $\mathcal{A}(\omega)$ wählen wir $A \leq B \Leftrightarrow A \overset{!}{\supset} B$. Sei also $\{B_i\}_{i \in I}$ eine total geordnete Teilmenge, d.h. für $B_j, B_k \in \{B_i\}_{i \in I}$ gilt stets $B_j \subset B_k$ oder $B_k \subset B_j$. Dann kann I höchstens so viele Elemente wie Ω enthalten und ist damit höchstens abzählbar. Da eine σ -Algebra unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen ist, ist also auch $\bigcap_{i \in I} B_i \in \mathcal{A}$ und wegen $\omega \in B_i$ für alle $i \in I$ gilt sogar $\bigcap_{i \in I} B_i \in \mathcal{A}(\omega)$. Da offensichtlich $\bigcap_{i \in I} B_i \subset B_k$ für alle $k \in I$, ist $\bigcap_{i \in I} B_i$ eine obere Schranke von $\{B_i\}_{i \in I}$. Also besitzt $\mathcal{A}(\omega)$ ein maximales Element C .

Angenommen $C \neq A(\omega)$. Dann existiert ein $B \in \mathcal{A}(\omega)$ mit $B \cap C \subsetneq C$. Da aber $B \cap C \in \mathcal{A}(\omega)$ ist dies ein Widerspruch zur Maximalität von C . Also ist $C = A(\omega) \in \mathcal{A}$.

- (c)¹ Wenn $A(\omega) \neq A(\eta)$ dann ist o. B. d. A. $A(\omega) \cap A(\eta) \subsetneq A(\omega)$ und da $A(\omega) \in \mathcal{A}$ minimal ist mit $\omega \in A(\omega)$ (siehe (b)) folgt $\omega \notin A(\omega) \cap A(\eta) \in \mathcal{A}$ und damit auch $A(\omega) \subset A(\omega)^c \cup A(\eta)^c \Rightarrow A(\omega) \subset A(\eta)^c \Rightarrow A(\omega) \cap A(\eta) = \emptyset$.
- (c)² Sei $\tau \in A(\omega) \cap A(\eta)$. Es ist zu zeigen, dass $A(\omega) = A(\eta)$. Dazu zeigen wir, dass $A(\omega) = A(\tau)$ und analog $A(\eta) = A(\tau)$.

Es gilt

$$A(\omega) = \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ \omega \in B}} B = \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ \omega, \tau \in B}} B \supset \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ \tau \in B}} B = A(\tau).$$

Angenommen $A(\tau) \subsetneq A(\omega)$. Dann existiert $B \in \mathcal{A}$ mit $\tau \notin B \ni \omega$. Damit ist aber auch $B^c \in \mathcal{A}$ und $\tau \notin B^c \ni \omega$ im Widerspruch zu $\tau \in A(\omega)$. Folglich ist $A(\tau) = A(\omega)$.

- (d)¹ „ $\Leftarrow$ “ ist klar nach Teil (b) - $A(\omega) \in \mathcal{A}$. Umgekehrt folgt aus $B \in \mathcal{A}$ schon $B \subset \bigcup_{b \in B} A(b)$ und wegen $b \in A(b) \subset B \in \mathcal{A}$ für alle $b \in B$, schon $B = \bigcup_{b \in B} A(b)$.
- (d)² Es ist zu zeigen:

$$B \in \mathcal{A} \Leftrightarrow B = \bigcup_{\omega \in C_B} A(\omega) \text{ für eine Teilmenge } C_B \subset \Omega.$$

“ $\Leftarrow$ ”: $B \in \mathcal{A}$ ist in diesem Fall klar, denn C_B ist höchstens abzählbar.

“ $\Rightarrow$ ”: Wir behaupten, dass in diesem Fall $B = \bigcup_{\omega \in B} A(\omega)$ gilt.

Es genügt zu zeigen, dass $A(\omega) \subset B$ für alle $\omega \in B$. Das ist aber klar, denn

$$A(\omega) = \bigcap_{\substack{C \in \mathcal{A} \\ \omega \in C}} C = \bigcap_{\substack{C \in \mathcal{A} \\ \omega \in C}} C \cap B \subset B.$$

Bemerkung: Für die Teilaufgaben (c) und (d) finden Sie zwei unterschiedliche Formulierungen der jeweiligen Lösung.

1.4 Elementare Eigenschaften signierter Maße. Es sei μ ein signiertes Maß oder ein Inhalt auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Beweisen Sie für $A, B, C \in \mathcal{A}$:

- (a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,
- (b) $\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$,
- (c) $\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A)$, falls $B \subseteq A$,
- (d) $\mu(A \cup B \cup C) + \mu(A \cap B) + \mu(B \cap C) + \mu(C \cap A) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) + \mu(A \cap B \cap C)$.

Lösung:

(c) Es ist $A = (B \setminus A) \coprod A$ und damit aufgrund der Additivität von μ : $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$. Falls $\mu(B)$ endlich ist, folgt sogar $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$. (Ansonsten ist die linke Seite eventuell $\infty - \infty$ und damit nicht definiert.)

(a) Falls $\mu(A \cap B) = \infty$ ist insbesondere $\mu(A) = \infty$ und damit steht auf beiden Seiten der Gleichung ∞ und es ist nichts zu zeigen. Ist $\mu(A \cap B) < \infty$ folgt aus $A \cup B = A \coprod B \setminus (A \cap B)$, dass $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, wobei wir für die letzte Gleichung (c) verwendet haben.

(b) Es ist $A \setminus B \coprod B = A \cup B = B \setminus A \coprod A$ und die Behauptung folgt aus der Additivität von μ .

(d) Folgt aus wiederholter Anwendung von (a): Falls einer der Terme $\mu(A \cap B), \mu(B \cap C)$ oder $\mu(A \cap C)$ unendlich ist, ist nichts zu zeigen. Ansonsten impliziert (a) die folgenden drei Gleichungen:

$$\mu(A \cup (B \cup C)) + \mu(A \cap (B \cup C)) = \mu(A) + \mu(B \cup C) \quad (1)$$

$$\mu(B \cup C) + \mu(B \cap C) = \mu(B) + \mu(C) \quad (2)$$

$$\mu((A \cap B) \cup (A \cap C)) + \mu((A \cap B) \cap (A \cap C)) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap C), \quad (3)$$

wobei (2) bzw. (3) aufgrund der Annahme $\mu(A \cap B), \dots < \infty$ äquivalent zu

$$\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) - \mu(B \cap C) \quad (4)$$

$$\mu(A \cap (B \cup C)) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap C) - \mu(A \cap B \cap C) \quad (5)$$

sind. Die Behauptung folgt nun durch Einsetzen von (4) und (5) in die Gleichung (1).